

基于 BDF2-AB2 的钢铸件凝固多物理场耦合模拟方法

李嘉伟^{1, 2}, 潘思源^{1, 2}, 江北竹^{1, 2}, 张宇昕^{1, 2}, 石宇航^{1, 3},
殷亚军¹, 李 文¹, 沈 旭¹, 周建新¹

(1. 华中科技大学材料成形与模具技术全国重点实验室, 湖北武汉 430074; 2. 华中科技大学材料科学与工程学院, 湖北武汉 430074; 3. 华中科技大学软件学院, 湖北武汉 430074)

摘要: 钢铸件凝固过程数值模拟对于缺陷预测与工艺优化具有重要意义, 但其强非线性特性对算法稳定性与计算效率提出了严峻挑战。为此, 本研究提出一种基于BDF2-AB2混合时间积分格式的多物理场耦合求解方法, 详细介绍了数学模型建立及数值离散方法, 并将其与经典显式欧拉法进行了对比。结果表明, 在相同网格规模下, BDF2-AB2方法的单步计算成本与显式欧拉法相当, 且在稳定性方面具有显著优势。显式欧拉法在时间步长增至0.000 5 s时发生数值失稳, 而BDF2-AB2格式在步长达到0.01 s时才发生数值失稳, 其稳定步长上限约为显式欧拉法的20倍。在工程算例中, BDF2-AB2方法能够准确模拟三维铸锭的凝固过程及宏观偏析行为, 可为铸件凝固过程的高效、高精度数值模拟提供有效的计算手段。

关键词: BDF2-AB2时间离散; 凝固模拟; 数值稳定性; 计算效率; 隐式算法; 铸钢; 宏观偏析; 多物理场耦合

中图分类号: TG24; TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4977 (2026) 08-0869-08

DOI: 10.27014/j.cnki.zhuzao.2026.0112

A BDF2-AB2-Based Multiphysics Coupled Simulation Method for Steel Casting Solidification

LI Jia-wei^{1, 2}, PAN Si-yuan^{1, 2}, JIANG Bei-zhu^{1, 2}, ZHANG Yu-xin^{1, 2},
SHI Yu-hang^{1, 3}, YIN Ya-jun¹, LI Wen¹, SHEN Xu¹, ZHOU Jian-xin¹

(1. State Key Laboratory of Materials Processing and Die & Mould Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, Hubei, China; 2. School of Materials Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, Hubei, China; 3. School of Software Engineering, Wuhan 430074, Hubei, China)

Abstract: Numerical simulation of the solidification process of steel castings plays a crucial role in defect prediction and process optimization. However, the strong nonlinearity of the governing equations poses significant challenges to the stability and efficiency of numerical algorithms. This study proposes a multiphysics coupled solution method based on the BDF2-AB2 hybrid time integration scheme, provides a detailed introduction to the establishment of mathematical models and numerical discretization methods, and compares it with the classical explicit Euler method. The results show that, under comparable mesh resolutions, the computational cost per time step of BDF2-AB2 method is similar to that of the explicit Euler method, and exhibits a significant advantage in numerical stability. The explicit Euler method becomes unstable when the time step increases to 0.000 5 s, while the BDF2-AB2 scheme shows numerical stability until the time step reaches 0.01 s, with a maximum stable time step approximately 20 times larger than that of the explicit Euler method. In engineering applications, the proposed BDF2-AB2 method can successfully capture the solidification process and macro segregation behavior of three-dimensional steel ingots, and provide an efficient and reliable computational framework for high-fidelity numerical simulation of casting solidification processes.

Key words: BDF2-AB2 time discretization; solidification simulation; numerical stability; computational efficiency; implicit algorithm; cast steel; macro segregation; multiphysics coupling

基金项目: 重点产品、工艺“一条龙”应用计划方向“铸造工艺全流程仿真软件”项目。

收稿日期: 2026-03-23 收到初稿, 2026-05-15 收到修订稿。

作者简介: 李嘉伟 (2001-), 男, 硕士, 研究方向为铸件凝固多物理场耦合模拟方法研究。E-mail: 18327074910@163.com

通信作者: 殷亚军, 男, 研究员, 博士生导师。E-mail: yinyajun436@hust.edu.cn

引用格式: 李嘉伟, 潘思源, 江北竹, 等. 基于 BDF2-AB2 的钢铸件凝固多物理场耦合模拟方法 [J]. 铸造, 2026, 75 (8): 869-876.

Li Jiawei, Pan Siyuan, Jiang Beizhu, et al. A BDF2-AB2-based multiphysics coupled simulation method for steel casting solidification [J]. Foundry, 2026, 75 (8): 869-876.

钢铁材料作为现代工业的基石，其成形工艺的优化与控制至关重要^[1]。铸造是获得复杂形状金属构件的主要方法之一，尤其是大型钢铸件的生产，如重型机床底座、水电轮机转轮和大型船用柴油机缸体等。然而，铸件凝固过程中，金属由液态向固态转变伴随着体积收缩与潜热释放，因此极易产生缩孔、缩松及宏观偏析等内部缺陷^[2]，严重损害构件的力学性能和使用寿命。

由于钢铸件凝固过程通常发生在高温、封闭且不可视的环境中，试验手段难以对内部温度场、流动场及溶质分布进行实时测量与精确表征^[3]，这限制了对凝固机理的深入研究^[4]。近年来数值模拟方法凭借其可控性强、信息获取全面等优势，成为解决凝固过程问题的核心工具^[5]。它通过求解基于凝固过程的控制方程，再现铸件与铸型系统中温度场随时间的变化，进而预测可能产生缺陷的区域^[6]。数值模拟结果的可靠性直接决定了其指导工艺优化的价值。

凝固过程的控制方程，本质上是一个强非线性的瞬态热传导问题^[7]。这种非线性特性对数值求解算法提出了严峻考验。目前，在众多商业铸造模拟软件及自研代码中，显式时间推进格式，特别是显式欧拉法，因格式简单、无需迭代求解和易于编程实现而被广泛应用^[8]。但显式欧拉法是一种条件稳定的算法，其稳定性受制于CFL（Courant-Friedrichs-Lewy）条件^[9]：

$$\Delta t \leq C \frac{(\Delta x)^2}{\alpha} \quad (1)$$

式中： Δx 为时间步长， Δt 为空间步长， α 为热扩散率； C 为常数。

这在大规模精细计算中会导致计算效率极低。因此，发展无条件稳定的隐式或半隐式算法是突破这一瓶颈的关键。

在众多时间离散方法中，后向差分公式（Backward Differentiation Formula, BDF）系列^[10]，特别是二阶BDF（BDF2）算法，为解决上述矛盾提供了极具潜力的方案。BDF2作为一种A-稳定（即在求解稳定系统时，其数值稳定性不依赖于步长）的隐式方法，在应用于线性常微分方程时具有优越的数值稳定性^[11]，而凝固作为典型的相变传热问题，其数学模型通常具有强非线性与刚性特征，界面移动和潜热释放过程导致系统呈现多尺度动力学特性^[12]，对于这类具有刚性特征的非线性问题，BDF2通常表现出比显式方法宽得多的稳定区域^[13]。这允许使用者在满足精度要求的前提下，采用远大于显式欧拉法稳定条件所允许的时间步长进行模拟，从而大幅减少总时间步数，提升计算速度。

本研究面向钢铸件凝固过程数值模拟需求，构建了一种基于BDF2-AB2混合时间离散格式的多物理场耦

合求解方法。该方法可统一求解流动、传热、相变及溶质输运等耦合过程，显著提高时间推进的稳定性，进而提高计算效率。通过数值算例与工程实例计算，对该方法的稳定性、计算效率及物理预测能力进行了验证。

1 数学模型

欧拉-欧拉双相模型^[14]常用于模拟液-固两相体系，基于此构造凝固过程数学模型。在大型钢铸件凝固过程模拟中，铸件内部可视为双相体系，即液态金属相（L）与固态金属相（s），相应的体积分数分别为 ϕ_L 与 ϕ_s ，且满足 $\phi_L + \phi_s = 1$ 。固相率由温度场通过相图关系与动力学弛豫模型确定；液相中考虑由热浮力与溶质浮力驱动的自然对流，以及糊状区中的Darcy流动^[15]。对Fe-C二元相图的液/固相线作线性化处理，因此平衡分配系数以及液相线斜率均为常数；凝固过程中的热溶质对流采用Boussinesq近似^[16]；糊状区渗透率采用Kozeny-Carman模型^[17-18]。该模型耦合求解了质量、动量、能量与溶质守恒方程，并考虑了相变潜热释放与溶质再分配效应。

1.1 控制方程

凝固过程所涉及的主要控制方程及其子关系式如表1和表2所示。

表1 两相模型中的守恒方程、源项和交换项以及辅助关系
Tab. 1 Conservation equations, source and exchange terms and auxiliary equations in the two-phase model

方程名称	数学公式	编号
Mass	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$	(2)
Momentum	$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + S_D + S_B$	(3)
Enthalpy	$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) - S_L$	(4)
Species	$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_L = \nabla \cdot (D_L \nabla C_L)$	(5)
Drag	$S_D = -\frac{\mu}{K} \mathbf{u}$	(6)
Buoyancy	$S_B = \rho_0 g [\beta_T (T - T_0) + \beta_C (C_L - C_0)] \mathbf{e}_z$	(7)
Latent heat	$S_L = \rho L \frac{\partial \phi_s}{\partial t}$	(8)
Permeability	$K = K_0 \frac{\phi_L^3}{(1 - \phi_L)^2}$	(9)
Mixture conc.	$C = \phi_L C_L + \phi_s C_s$	(10)
Partition	$C_s = k_p C_L$	(11)
Eq. solid frac.	$\phi_s^{\text{eq}} = \begin{cases} 0 & T \geq T_L(C_L) \\ \frac{T_L(C_L) - T}{T_L(C_L) - T_s(C_s)} & T_s(C_s) < T < T_L(C_L) \\ 1 & T \leq T_s(C_s) \end{cases}$	(12)
Relaxation	$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \frac{\phi_s^{\text{eq}} - \phi_s}{\tau}$	(13)

表2 控制方程符号说明
Tab. 2 Nomenclature of the governing equations

变量	含义	单位	首次出现方程	变量	含义	单位	首次出现方程
ρ	密度	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	(2)	g	重力加速度	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	(7)
t	时间	s	(2)	β_T	热膨胀系数	K^{-1}	(7)
u	速度	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	(2)	T_0	参考温度	K	(7)
p	压力	Pa	(3)	β_C	溶质膨胀系数	$\text{wt}\%^{-1}$	(7)
μ	动力粘度	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	(3)	C_0	参考浓度	wt%	(7)
S_D	达西阻力源项	$\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$	(3)	e_z	竖直方向单位矢量		(7)
S_B	热溶质浮力源项	$\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$	(3)	L	潜热	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$	(8)
c_p	比定压热容	$\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$	(4)	Φ_s	固相率		(8)
T	温度	K	(4)	Φ_L	液相率		(9)
k	热导率	$\text{W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$	(4)	K_0	渗透率常数	m^2	(9)
S_L	潜热源项	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$	(4)	C_s	固相浓度	wt%	(10)
C	混合浓度	wt%	(5)	k_p	平衡分配系数		(11)
C_L	液相浓度	wt%	(5)	T_L	液相线温度	K	(12)
D_L	液相溶质扩散系数	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	(5)	T_s	固相线温度	K	(12)
K	渗透率	m^2	(6)	Φ_s^{eq}	平衡固相率		(12)
ρ_0	参考密度	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	(7)	τ	弛豫时间	s	(13)

1.2 阻断机制

本研究在Fe-C合金凝固模拟中,建立了多种物理阻断机制以确保数值稳定性并准确模拟凝固过程的物理现象^[19]。主要阻断机制包括:

(1) 糊状区阻力限制。采用Darcy定律模拟糊状区枝晶间的流动阻力,阻力系数与液相率紧密相关:对完全凝固区域($\phi_L < 0.01$)施加极大阻力系数(1×10^{10}),几乎完全抑制流体流动;糊状区($0.01 < \phi_L < 0.99$)采用Kozeny-Carman渗透率模型,渗透率K随液相率变化,模拟枝晶骨架对流动的阻碍作用;纯液相区($\phi_L > 0.99$)忽略流动阻力,允许自由对流。

(2) 相变动力学速率限制。为防止非物理的快速相变,采用弛豫时间模型控制凝固速率,即相变速率限制为每个时间步固相率变化不超过0.5,温度变化率限制为每时间步不超过 $\pm 5 \text{ K}$,确保热扩散数值稳定性。

2 基于BDF2-AB2的数值离散方法

本文重点介绍BDF2-AB2混合时间离散方法及其在凝固多物理场耦合方程组中的实现方式。其基本思想如下:对各控制方程中的非稳态项采用二阶后向差分公式(BDF2)离散,对非线性对流项采用二阶Adams-Bashforth外推(AB2)处理,对扩散项及阻力项采用隐式处理^[20]。该方法兼顾了二阶时间精度、较好的稳定性以及低非线性求解成本,是本文数值模拟方法的核心。

在具体实现上,采用分阶段启动方案:初始时间步使用一阶显式欧拉格式以获得稳定初始解,三步后切换至BDF2-AB2混合格式进行计算。

2.1 BDF2 时间离散

设变量 ϕ 在时间层 t^{n-1} 、 t^n 、 t^{n+1} 上的取值分别为 ϕ^{n-1} 、 ϕ^n 、 ϕ^{n+1} ,则时间导数在 t^{n+1} 处可用二阶后向差分公式近似为:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{n+1} \approx \frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}}{2\Delta t} \quad (14)$$

该格式具有二阶时间精度。与一阶显式欧拉格式相比,BDF2在相同步长下能够更准确地描述温度场、速度场及凝固界面的瞬态演化,同时具有更大的稳定区域。

对于计算初始阶段,由于BDF2需要前两个时间层的信息,首个时间步采用一阶格式启动,从第二步起转入BDF2主格式。这一处理方式也与当前程序相一致。

2.2 AB2 对流项外推

控制方程中的对流项具有明显非线性。若全部采用隐式处理,将导致每个时间步都需要求解非线性方程组,计算过多。为此,对对流项采用AB2外推:

$$N^{n+1} \approx 2N^n - N^{n-1} \quad (15)$$

式中: N 为对流算子。

该方法利用前两个时间层的对流项信息构造 $n+1$

时刻的显式近似,既保持了二阶时间精度,又避免了非线性迭代,从而提高了整体求解效率。代码中速度对流项和标量对流项均按这一思路处理。

2.3 控制方程离散格式

为提高时间推进的稳定性,对控制方程采用BDF2-AB2时间离散格式。下面以动量方程为例说明离散过程。

考虑二维空间的原始动量方程:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \mu \nabla^2 u - \nabla p + S \quad (16)$$

式中, S 包含Darcy源项和浮力项。

对时间的导数进行二阶BDF差分:

$$\rho \left(\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} \right) = \mu \nabla^2 u^{n+1} - \nabla p^{n+1} + S^{n+1} \quad (17)$$

对于非线性项 $u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1}$, 使用AB2阶外推:

$$u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} = 2(u^n \cdot \nabla u^n) - (u^{n-1} \cdot \nabla u^{n-1}) \quad (18)$$

为简化书写,记对流项 $N = u \cdot \nabla u$, 其前两个时间层值 N^n 、 N^{n-1} 由上一时刻计算得到。最终离散方程为:

$$\frac{3}{2\Delta t} \rho u^{n+1} - \mu \nabla^2 u^{n+1} = \rho \left[\frac{2}{\Delta t} u^n - \frac{1}{2\Delta t} u^{n-1} \right] - \rho (2N^n - N^{n-1}) - \nabla p^{n+1} + S^{n+1} \quad (19)$$

上述格式的优点在于:一方面,通过BDF2提高了时间离散精度;另一方面,通过对扩散项和阻力项的隐式处理减弱了时间步长受稳定性限制的程度。

本研究的温度场与溶质场在时间推进上同样采用BDF2-AB2的离散思路。其中,非稳态项采用BDF2离散,对流项采用AB2外推,扩散项采用隐式处理,从而与动量方程在时间离散思想上保持一致。

3 数值验证对比与分析

为系统评估BDF2-AB2混合格式的性能,选用经典方腔流动作为验证算例^[21]。通过与显式欧拉方法进行对比,重点考察算法在计算精度、数值稳定性、计算效率以及物理预测能力等方面的表现。

3.1 基准案例验证结果

选取单位正方形区域进行计算,采用结构化正交网格进行离散。网格规模为 64×64 , 空间步长在 x 和 y 方向均为 0.002 m 。边界条件设置如下:上壁面施加恒定切向速度驱动,其余三壁面均为无滑移边界条件,速度为零。流体满足不可压缩条件,计算过程中不考虑温度与溶质影响,仅求解流动控制方程,为考察求解器在不同流动强度下的适用性,选取典型雷诺数条件 ($Re=100$ 、 $1\ 000$ 和 $5\ 000$) 进行计算。图1为不同雷诺

数条件下方腔流线、速度与压力分布结果。在较低雷诺数 ($Re=100$) 条件下,流场结构较为简单,角落区域的次级涡旋结构不明显;随着雷诺数增加,流场逐渐复杂,在主涡结构之外,角落区域次级涡旋结构区域变大,表现出明显的惯性主导特征。上述流动结构与经典文献中的基准结果一致,说明所建立的数值方法能够稳定地模拟凝固界面的演化过程,为后续算法稳定性分析提供了可靠基础。

3.2 时间离散稳定性分析

3.2.1 不同网格规模下的计算效率对比

针对3.1节的典型案例配置,在4个不同分辨率的网格上进行模拟:粗网格 (15×15)、中等网格 (25×25 和 50×50)、较细网格 (100×100), 时间步长固定为 0.001 s 。传统显式欧拉方法与BDF2方法在相同计算条件下的计算时间对比如表3所示。结果显示,两种方法在不同网格尺度下的计算时间增长趋势基本一致,均随网格细化呈近似二次增长,符合理论预期。总体而言,BDF2方法在保持与传统显式方法相近计算成本的同时,为后续稳定性测试中采用更大时间步长提供了可能。

表3 不同网格规模下的计算时间对比
Tab. 3 Comparison of computation time under different grid scales

方法	计算时间/s			
	15 × 15 网格	25 × 25 网格	50 × 50 网格	100 × 100 网格
显式欧拉	2.31	5.75	20.64	78.96
BDF2	2.34	5.58	19.73	84.77

3.2.2 不同时间步长下的稳定性对比

为评估BDF2方法的稳定性优势,固定网格为 25×25 , 总模拟时间为 30 s , 选取一系列时间步长进行测试,并与显式欧拉方法对比。以 $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ 的模拟结果为基准,计算不同时间步长下固相率的相对误差,结果如图2和表4所示。

基于计算效率与时间步长对比结果可知,在相同的空间离散尺度或时间步长设置下,半隐式BDF2格式的计算流程更为复杂,但其计算效率与传统显式欧拉方法相比并无显著下降。此外,显式欧拉方法在时间步长增大至 0.0005 s 时已开始出现数值失稳现象,而半隐式BDF2方法在时间步长达 0.01 s 时才发生数值失稳,其稳定时间步长上限约为显式欧拉方法的20倍。这表明BDF2方法能够显著扩大稳定时间步长,从而减少总时间步数,提高计算效率。

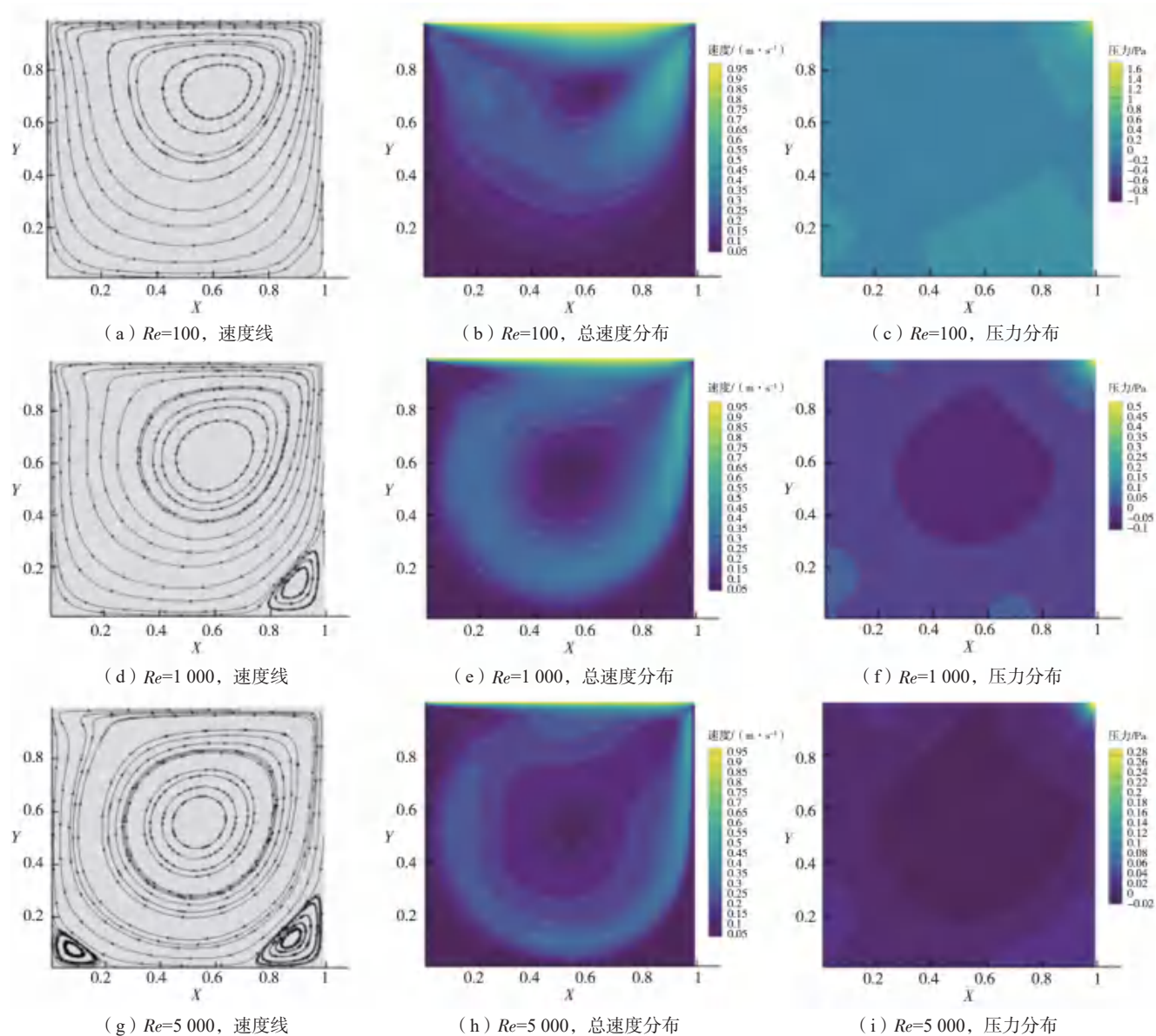


图1 不同雷诺数下方腔内部速度与压力分布结果

Fig. 1 Velocity and pressure distributions inside the cavity under different Reynolds numbers

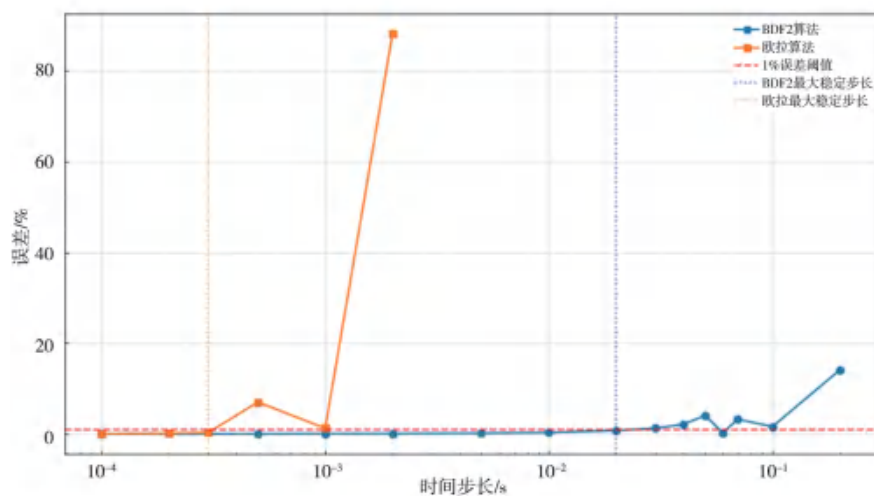


Fig. 2 Comparison of errors of BDF2 algorithm and Euler algorithm as a function of time step

表4 不同时间步长下的计算时间对比
Tab. 4 Comparison of computation time under different time steps

方法	计算时间/s				
	时间步长 0.000 5 s	时间步长 0.001 s	时间步长 0.002 s	时间步长 0.005 s	时间步长 0.01 s
显式欧拉	10.38	6.32	3.79	2.73	2.32
BDF2	9.66	5.95	3.89	2.74	2.32

4 工程实例计算与结果分析

为进一步验证BDF2-AB2时间离散方法在实际铸造问题中的适用性，选取包含八角锭体和冒口的典型铸锭结构作为计算对象进行数值模拟。该算例能够较

为全面地反映铸锭凝固过程中多区域耦合传热、相变等关键特征。首先采用三维建模软件建立钢锭的STL格式模型，将模型导入华铸 CAE前处理软件进行网格剖切，网格大小为10 mm，如图3所示。

剖切完成后，软件输出SGN网格文件，导入自主开发的三维铸造数值模拟框架求解。选取20号钢（0.2%C）作为模拟材料，物性参数设置如表5所示，其化学成分和力学性能符合GB/T 699—2015要求，液相线、固相线由线性化Fe-C相图关系计算，数值上满足20号钢在纯铁熔点附近的相变区间。密度、比热容、热导率及粘度参数总体处于钢液模拟常用范围内，可满足当前低碳钢凝固-流动耦合模拟需求，初始温度设为1 810 ℃，凝固模拟的结果用tecplot输出，以x轴中心处切面进行显示。

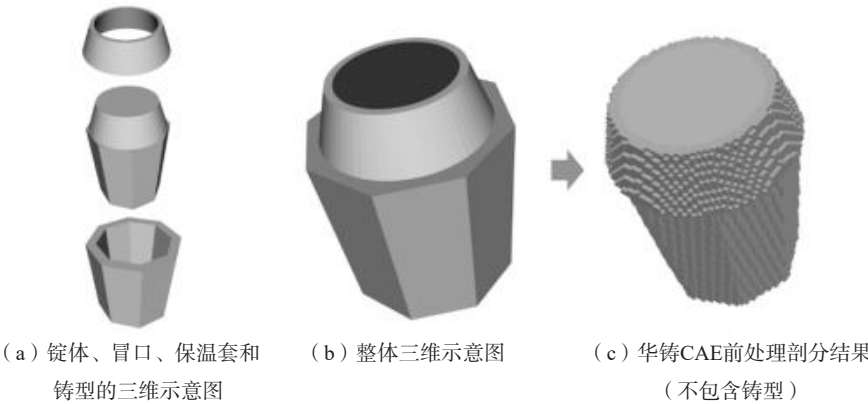


图3 钢铸锭三维示意图和剖分结果
Fig. 3 Three-dimensional schematic and meshing result of a steel ingot

表5 模拟材料的物性参数
Tab. 5 Physical parameters of the simulation materials

参数	20号钢	铸型	保温套
密度/(g·cm ⁻³)	7.6	1 800	400
热导率/(W·m ⁻¹ ·K ⁻¹)	0.122	0.001 92	0.4
比热容/(J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹)	520	700	600
液相线温度/K	1 807		
固相线温度/K	1 797		
结晶潜热/(cal·g ⁻¹)	60		
动力粘度/(Pa·s)	0.006		
平衡分配系数	0.36		
液相线斜率/[K·(wt.%) ⁻¹]	-80.45		
热膨胀系数/K ⁻¹	1.15 × 10 ⁻⁴		

图4为20号钢凝固过程中固相率与速度分布模拟结果。在凝固初期，铸件内部以自然对流为主，由于铸锭边角区域冷却较快，形成了由壁面向中心的温度梯度，液相在密度差驱动下向下运动，计算域内出现了典型的“双胞胎”结构^[22]：受热浮力与溶质浮力耦合

作用影响^[23]，液相在铸锭中心区域形成两个对称的对流涡旋。该现象表明本模型成功捕捉了热溶质对流的相互作用。

图5给出了凝固结束后的宏观偏析分布。可以明显看出，铸锭顶部区域呈现正偏析（溶质富集），而底部区域呈现负偏析（溶质贫乏）。这一分布特征可由凝固过程中的溶质再分配与溶质输运机制解释：在凝固初期，固相优先在冷端（铸锭底部及侧壁）形成，溶质被排出至剩余液相；随着凝固前沿向中心推移，富集溶质的液相在热溶质浮力驱动下向上运动，将溶质携带至铸锭上部区域^[24]。这种宏观偏析分布模式，与经典钢铸锭凝固理论和文献的试验结果高度吻合，如图6^[25]所示，充分验证了本模型在溶质输运与相变耦合模拟中的合理性与数值可靠性。

综上所述，本方法成功实现了钢铸锭凝固过程的多物理场耦合模拟，计算结果在流场结构与宏观偏析分布两方面均与理论预期相符，证明了所建立的BDF2-AB2混合格式求解策略在实际工程问题中的有效性与应

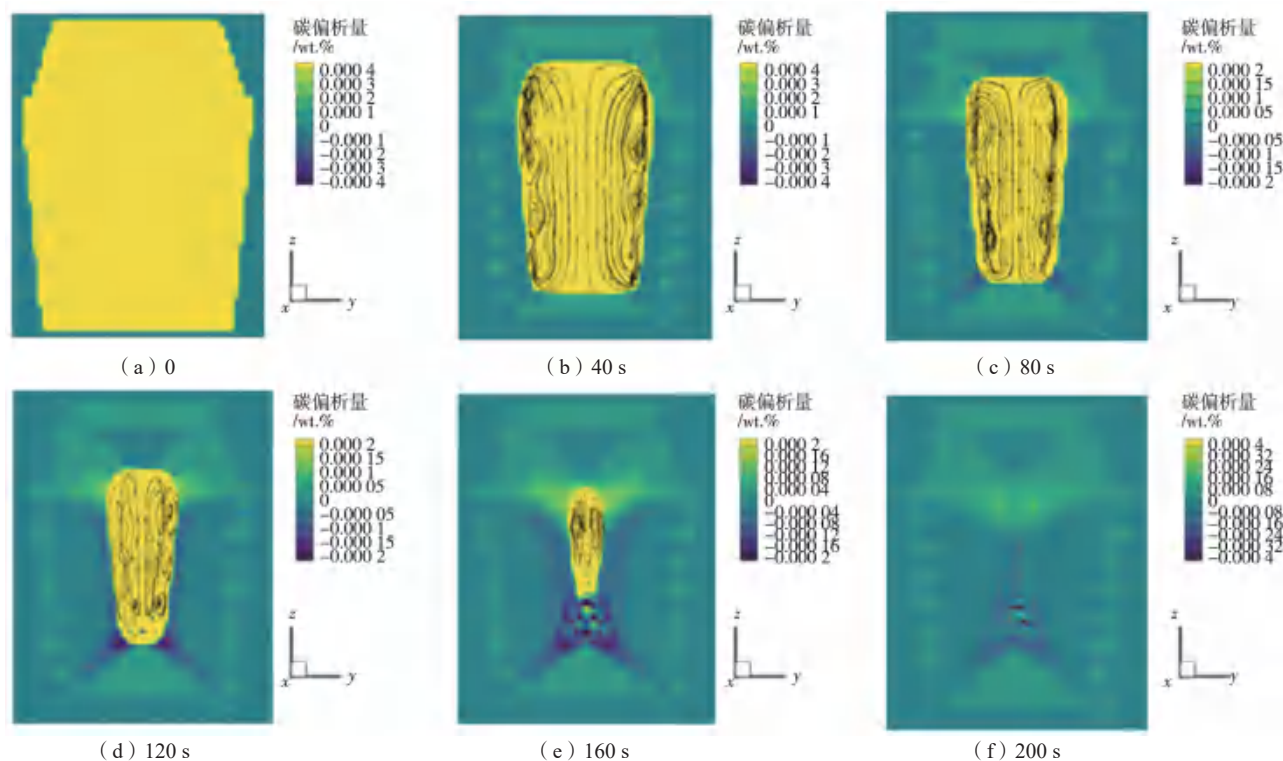


图4 钢铸锭偏析量与速度变化
Fig. 4 Segregation amount and velocity profiles of the steel ingot

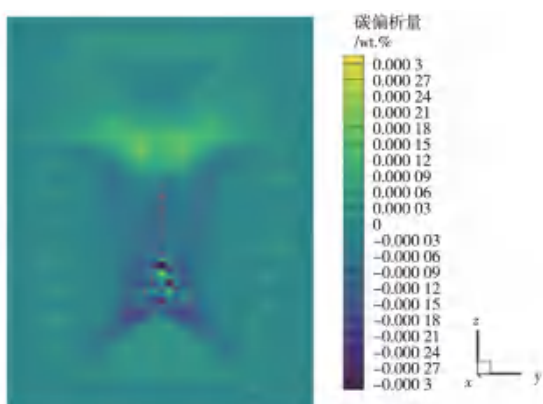


图5 钢铸锭最终偏析分布
Fig. 5 Final segregation distribution of the steel ingot

用价值。

5 结论

(1) 提出了一种基于BDF2-AB2混合时间积分格式的多物理场耦合求解方法, 该方法单步计算成本与传统显式方法相近, 并且可保持二阶时间精度。

(2) 显式欧拉方法在时间步长增至0.0005 s时已出现数值失稳现象, 而BDF2-AB2方法在时间步长达0.01 s时才发生数值失稳, 其稳定时间步长上限为显式欧拉方法的20倍以上。

(3) 采用BDF2-AB2方法成功实现了三维铸锭凝

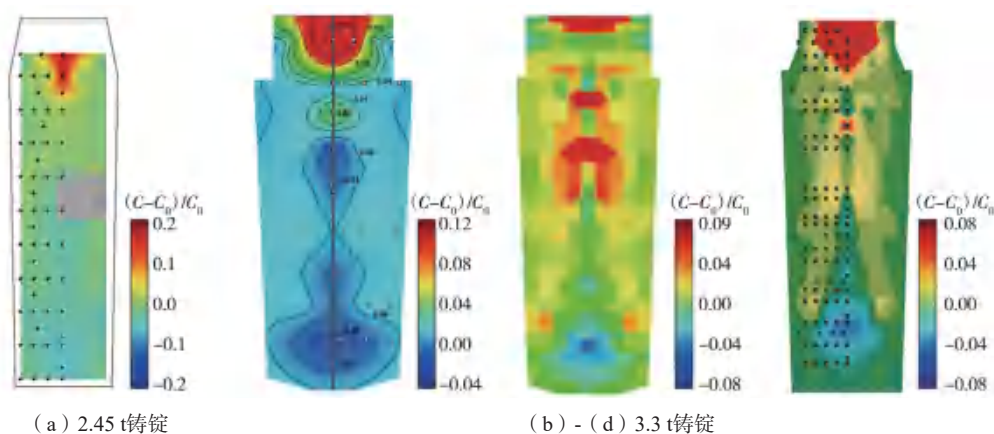


图6 基于文献浓度测量重构的典型宏观偏析分布

Fig. 6 Typical reconstructed macrosegregation maps according to the concentration measurements in literatures

固过程模拟。计算结果捕捉到热溶质浮力耦合作用下的“双胞胎流”结构,并再现了铸锭底部正偏析、顶部负偏析的典型宏观偏析分布模式。该流场结构和溶质

分布特征与经典凝固理论吻合,充分验证了本模型在实际工程问题中的物理合理性与数值可靠性。

参考文献:

- [1] 周建新,殷亚军,沈旭,等.铸造充型凝固过程数值模拟系统及应用[M].北京:机械工业出版社,2020.
- [2] Węgrzyn-Skrzypczak E, Skrzypczak T. Numerical modeling of the solidification process with consideration of shrinkage cavities formation and the influence of solid phase content on the feeding of the casting [J]. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2023, 22 (2): 75–86.
- [3] Ludwig A, Wu M H, Kharicha A. On macrosegregation [J]. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2015, 46: 4854–4867.
- [4] 赵诗瑶,朱帆,傅琪,等.基于连续介质模型的GCr15SiMn钢铸件宏观偏析研究[J].*钢铁研究学报*, 2025, 37 (11): 1467–1481.
- [5] 徐贵宝,常有余.基于数值模拟的凝固成形技术探讨[J].*机车车辆工艺*, 2024, 60 (5): 48–55.
- [6] 侯华.铸造充型凝固过程宏观数值模拟及工程应用[D].太原:中北大学,2005.
- [7] Ércegyi A, Rácz E. Heat conduction model based on the explicit euler method for non-stationary cases [J]. *Entropy*, 2025, 27 (10): 994.
- [8] 张红松.一般铸件凝固过程数值模拟研究[D].昆明:昆明理工大学,2003.
- [9] Courant R, Friedrichs K, Lewy H. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik [J]. *Mathematische Annalen*, 1928, 100: 32–74.
- [10] Ferziger J H, Peric M, Street R T, et al. *Computational methods for fluid dynamics* [M]. Berlin: Springer, 1996.
- [11] 吕彤,叶星旸.一类线性反应扩散方程最优控制问题的变步长BDF2格式的数值分析[J].*计算数学*, 2025, 47 (1): 79–97.
- [12] 曲良辉,杨金根,邢琳,等.热源周期振荡条件下一维融化问题的数值研究[J].*信阳师范学院学报(自然科学版)*, 2015 (3): 334–337.
- [13] Rosam J, Jimack P K, Mullis A. A fully implicit, fully adaptive time and space discretisation method for phase-field simulation of binary alloy solidification [J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 225 (2): 1271–1287.
- [14] Ludwig A, Vakhruhev A, Holzmann T, et al. Two-phase modelling of equiaxed crystal sedimentation and thermomechanic stress development in the sedimented packed bed [C]// *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2015, 84: 012102.
- [15] Li W S, Shen H F, Liu B C. Three-dimensional simulation of thermosolutal convection and macrosegregation in steel ingots [J]. *Steel Research International*, 2010, 81 (11): 994–1000.
- [16] Gray D D, Giorgini A. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1976, 19 (5): 545–551.
- [17] Carman P C. Fluid flow through granular beds [J]. *Chemical Engineering Research and Design*, 1997, 75: S32–S48.
- [18] Dantzig J A, Rappaz M. *Solidification* [M]. EPFL Press, 2009.
- [19] Patankar S V. *Numerical heat transfer and fluid flow* [M]. CRC Press, 2018.
- [20] Chen C J, Zhang T. Unconditional stability of first and second orders implicit/explicit schemes for the natural convection equations [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2023, 139: 152–172.
- [21] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method [J]. *Journal of Computational Physics*, 1982, 48 (3): 387–411.
- [22] Okumura K, Kuwabara M, Sassa K, et al. Theoretical analysis and model experiment on thermosolutal convection during unidirectional solidification in the vertical direction [J]. *Tetsu To Hagane*, 1989, 75: 618–625.
- [23] Ghodrati N, Baiteche M, Loucif A, et al. Influence of hot top height on macrosegregation and material yield in a large-size cast steel ingot using modeling and experimental validation [J]. *Metals*, 2022, 12 (11): 1906.
- [24] Liu X, Zhang C J, Hu S W, et al. Research progress and prospects on the formation mechanism of macrosegregation and shrinkage porosity in large steel ingots [J]. *Progress in Natural Science: Materials International*, 2024, 34 (3): 470–481.
- [25] Duan Z H, Tu W T, Shen B Z, et al. Experimental measurements for numerical simulation of macrosegregation in a 36-ton steel ingot [J]. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2016, 47 (7): 3597–3606.