

熔模铸造蜡模注射成形过程中蜡料粘度的高精度建模

杨其航¹, 胡晓玉¹, 马聚怀¹, 王者¹, 张美娟², 郗喜望², 南海², 许庆彦¹, 李言祥¹

(1. 清华大学材料学院, 先进成形制造教育部重点实验室, 北京 100084;

2. 中国航发北京航空材料研究院, 北京 100095)

摘要: 航空航天钛合金结构件熔模精密铸造中, 蜡模尺寸精度决定铸件质量, 而数值模拟技术是优化蜡模注射成形的核心技术, 其精度高度依赖蜡料粘度模型参数。蜡料为非牛顿流体, Cross-WLF模型可精准描述其粘度-剪切速率-温度关系, 但Moldflow软件的数据库缺乏该模型参数, 且传统建模方法存在缺陷, 简单最小二乘法易陷局部极值, 牛顿法计算复杂度高且数值不稳定。因此, 以Kc-4017b蜡料为研究对象, 提出融合自动微分与SVD正则化的拟牛顿法, 用于粘度建模; 通过环形阶梯蜡模充型过程数值模拟, 结合实际注射成形进行试验验证。结果表明, 拟牛顿法建模决定系数 $R^2=0.989$, 显著高于最小二乘法($R^2=0.901$), 且残差分布更均匀; 其建模参数对应的Moldflow仿真结果与蓝光扫描实测数据位移趋势吻合度高, 可精准确定蜡模变形关键区域。本研究解决了蜡料Cross-WLF模型高维非线性参数建模难题, 为钛合金熔模铸造蜡模注射成形数值模拟提供了可靠参数支撑, 为钛合金结构件熔模精密铸造过程提供了理论基础。

关键词: 熔模铸造; 蜡模注射成形; Cross-WLF 粘度模型; 数值模拟

中图分类号: TG249.5; TP391.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4977 (2026) 04-0343-09

DOI: 10.27014/j.cnki.zhuzao.2026.0049

High-Precision Modeling of Wax Viscosity During Wax Pattern Injection Forming Process in Investment Casting

YANG Qi-hang¹, HU Xiao-yu¹, MA Ju-huai¹, WANG Zhe¹, ZHANG Mei-juan², QIE Xi-wang²,
NAN Hai², XU Qing-yan¹, LI Yan-xiang¹

(1. Key Laboratory for Advanced Materials Processing Technology, Ministry of Education, School of Materials Science and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. AECC Beijing Institute of Aeronautical Materials, Beijing 100095, China)

Abstract: In the investment precision casting of aerospace titanium alloy structural components, the dimensional accuracy of wax patterns determines the quality of castings. Numerical simulation is a key technology for optimizing wax pattern injection processing, and its accuracy highly depends on the parameters of the wax viscosity model. As a non-Newtonian fluid, the viscosity-shear rate-temperature relationship of wax can be accurately described by the Cross-WLF model. However, the database of Moldflow software lacks parameters for this model, and traditional fitting methods exist defects: the simple least squares method is prone to falling into local optima, while the Newton's method has high computational complexity and numerical instability. Therefore, taking Kc-4017b wax as the research object, a quasi-Newton method integrating automatic differentiation and SVD regularization has been proposed for the viscosity modelling. The verification was carried out through numerical simulation of mold filling processes of annular stepped wax patterns combined with actual injection forming tests. The results show that the coefficient of determination (R^2) of the quasi-Newton method for fitting is 0.989, which is significantly higher than that of the least squares method ($R^2=0.901$), and the residual distribution is more uniform; the Moldflow simulation results corresponding to its fitted parameters have a high degree of consistency with the displacement trend of the measured data obtained via blue light scanning, enabling accurate identification of the key regions of wax pattern deformation. This study solved the difficult problem of high-dimensional nonlinear parameter fitting for the wax Cross-WLF model, and provided reliable parameter support for the numerical simulation of injection forming process of wax patterns in titanium alloy investment casting and a theoretical foundation for the investment precision casting processes of titanium alloy structural components.

Key words: investment casting; wax pattern injection forming; Cross-WLF viscosity model; numerical simulation

收稿日期: 2025-10-28 收到初稿, 2025-11-10 收到修订稿。

作者简介: 杨其航 (1998-), 男, 博士生, 主要研究方向为熔模铸造全流程模拟仿真。E-mail: yang-qh24@mails.tsinghua.edu.cn

通信作者: 许庆彦, 男, 教授, 博士生导师。E-mail: scjxqy@mail.tsinghua.edu.cn

引用格式: 杨其航, 胡晓玉, 马聚怀, 等. 熔模铸造蜡模注射成形过程中蜡料粘度的高精度建模 [J]. 铸造, 2026, 75 (4): 343-351.
YANG Qihang, HU Xiaoyu, MA Juhuai, et al. High-precision modeling of wax viscosity during wax pattern injection forming process in investment casting [J]. Foundry, 2026, 75 (4): 343-351.

在航空航天领域,钛合金结构件作为核心承载与传力元件,其尺寸精度要求严苛,而熔模精密铸造是实现该类复杂结构件近净成形的核心工艺^[1-2]。在熔模铸造工艺流程中,蜡模尺寸偏差、表面质量及结构稳定性对最终钛合金铸件精度起决定性作用^[3-9]。蜡模制备采用注射成形,传统蜡模精度控制依赖“经验试错法”,通过反复调整注射温度、压力等工艺参数,通常需3~5轮试制,逐步优化蜡模质量,研制周期长、成本高,难以满足航空航天领域对复杂钛合金构件的研制需求^[10]。为解决这一问题,数值模拟技术被广泛应用于蜡模注射成形过程优化,通过预测熔体充型、冷却收缩、翘曲变形等关键物理现象,可减少60%以上的试模次数,显著缩短研发周期与成本^[11]。然而,数值模拟的精度高度依赖材料热物性参数的准确性,蜡模作为有机小分子材料,存在剪切致稀现象,为典型非牛顿流体,因此,其粘度作为描述蜡液流动能力的核心指标,显著影响充型完整性、收缩均匀性及翘曲变形^[12]。

目前,描述非牛顿流体粘度特性的模型主要包括 Carreau-Yasuda^[13]模型、WLF (Williams-Landel-Ferry)^[14]模型及Cross-WLF (Cross-Williams-Landel-Ferry)^[15]模型。其中,Carreau-Yasuda模型仅能反映剪切速率对粘度的影响,无法适配蜡料宽温度范围的流变行为;WLF模型虽考虑温度敏感性,但忽略了剪切速率的影响,因此在描述非牛顿流体剪切变稀现象时存在局限性;而Cross-WLF模型通过Cross剪切变稀项与WLF温度敏感项的复合,可同时精准描述蜡料在不同剪切速率与温度下的粘度特性,成为蜡料流变表征的最优选择^[16]。但Moldflow商业数据库中,仅包含传统热塑性高分子材料的流变数据,缺乏石蜡及蜡基复合材料等有机低分子材料的粘度模型参数,需通过试验建模获取Cross-WLF模型的7个关键参数,而该建模过程属于高维非线性优化问题,建模精度面临显著挑战,相关报道较少。冒文娟等人采用传统简单最小二乘法进行参数建模^[17],但其在蜡料Cross-WLF模型建立中存在固有缺陷:一是仅依赖一阶梯度信息,无法捕捉参数间的二阶耦合效应,在蜡料强非线性数据建模中易陷入局部极值;二是对初始值敏感,参数偏离合理范围时,误差增大,适配性差,难以满足蜡模的注射模拟精度需求。针对非线性数据建模,Shi等人采用牛顿法进行参数建模,其核心原理是利用目标函数在某点的一阶导数(梯度)和二阶导数(Hessian矩阵)信息,构建一个二次函数来近似目标函数^[18]。在迭代过程中,通过求解该二次函数的极小点来更新搜索方向和

步长,从而逐步逼近目标函数的极小值点。但其每次迭代都需要计算Hessian矩阵的逆矩阵,计算逆矩阵的复杂度通常为 $O(n^3)$,这使得牛顿法在处理高维问题时计算量非常大,计算效率较低。此外,如果Hessian矩阵奇异或病态(条件数很大),还会导致牛顿法无法正常计算或者收敛速度极慢。

针对上述问题,本研究在传统最小二乘法与牛顿法的基础上,提出通过动态构造Hessian矩阵近似正定矩阵的拟牛顿法,弥补简单最小二乘法在精度、效率及适配性上的缺陷以及牛顿法计算Hessian矩阵及其逆矩阵的高复杂度问题。并对熔模铸造专用Kc-4017b蜡料实际粘度测试结果进行建模,通过对比不同温度与剪切速率区间下拟牛顿法与传统最小二乘法的建模残差、决定系数 R^2 ,验证拟牛顿法的建模精度与稳定性;同时,构建航空航天钛合金结构件典型特征的环形阶梯蜡模三维模型,将两种方法建模的Cross-WLF模型参数导入Moldflow软件开展冷却-填充-保压-翘曲全流程注射成形数值模拟,结合MPI-25 t压蜡机注射试验与蓝光扫描实测数据,从充型时间、熔体前沿温度、翘曲变形位移等关键指标,量化评估改进方法对数值模拟精度的提升效果。本研究旨在为蜡料非牛顿流体粘度模型参数的高效精准求解提供新方法,填补Moldflow数据库中蜡基复合材料流变参数的空白,进而为航空航天领域复杂钛合金构件熔模精密铸造的蜡模制备工艺优化与质量控制提供理论支撑与技术参考,助力缩短构件研制周期、降低生产成本。

1 试验方法与数学模型

1.1 蜡模结构设计

针对航空航天用钛合金结构件复杂环形变壁厚的结构,设计多壁厚环形阶梯件,研究粘度对变壁厚结构注射充型过程的影响,如图1所示。

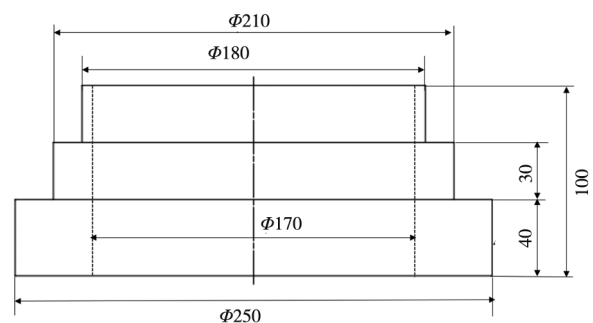


图1 环形阶梯蜡模示意图

Fig. 1 Schematic diagram of an annular stepped wax pattern

1.2 蜡模材料

本研究采用熔模铸造用Kc-4017b蜡料，其密度为 0.95 g/cm^3 ，滴点为 $94 \text{ }^\circ\text{C}$ ，软化点为 $79 \text{ }^\circ\text{C}$ 。粘度测试数据如图2所示，图2 (a)、(b)、(c)分别呈现了 $60 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $62 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $64 \text{ }^\circ\text{C}$ 下蜡料的粘度-剪切速率变化。

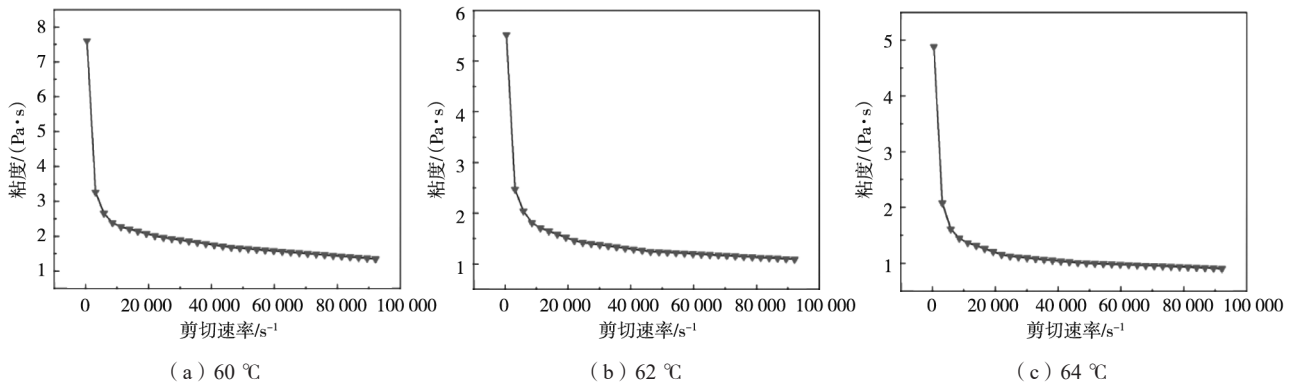


图2 蜡料粘度测试数据
Fig. 2 Wax viscosity test data

1.3 蜡模实际注射试验

压蜡试验在MPI-25 t压蜡机上进行，蜡料温度为 $65 \text{ }^\circ\text{C}$ ，模具温度为 $25 \text{ }^\circ\text{C}$ ，保压压力为 1 MPa ，保压时间为 60 s 。注蜡口直径为 8 mm ，为确保试验结果的准确性，在同一工艺条件下反复进行5次。注射试验完成后，对蜡模进行蓝光扫描，记录蜡模尺寸变化，与模拟结果比对验证。

1.4 蜡模注射成形过程数值模拟参数设置

将环形阶梯蜡模三维几何模型导入Moldflow软件后，首先开展网格划分工作。通过软件内置的网格划分模块生成双层面网格，并将蜡模网格全局边长设定为 2 mm 。网格划分完成后，需对网格质量进行系统校验，确保网格纵横比、单元重叠率等关键指标符合Moldflow数值模拟精度要求，剖分后网格如图3所示。模拟参数设置与试验参数相同，即蜡料温度为 $65 \text{ }^\circ\text{C}$ ，模具温度为 $25 \text{ }^\circ\text{C}$ ，保压压力为 1 MPa ，保压时间为 60 s ，注蜡口直径为 8 mm ，蜡模与模具边界换热系数为 $2500 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ 。数值模拟分析序列设置为“冷却-填充-保压-翘曲”耦合分析，覆盖蜡模注射成形的全

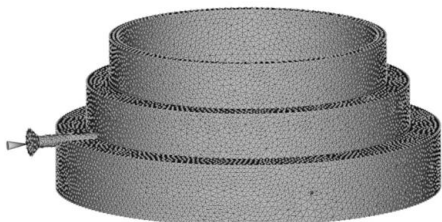


图3 蜡模网格划分图

Fig. 3 Meshing diagram of the wax pattern

在不同温度下，蜡料粘度均随剪切速率增大先快速下降，后渐趋平稳，体现出非牛顿流体剪切变稀特性；且温度越高，相同剪切速率下粘度越低，表明温度对蜡料流动性影响显著，因此对于粘度建模需要同时兼顾剪切速率和温度影响。

流程物理现象，依次模拟熔体在模具型腔中的充型流动、保压补缩阶段的压力传递、冷却凝固过程中的温度场变化、以及最终因收缩不均引发的翘曲变形。粘度设置方面，采用Cross-WLF剪切变稀粘度模型，符合蜡料真实粘度特性，并将粘度模型建模参数导入到Moldflow软件的数据库中，保证数值模拟准确性。

2 Cross-WLF粘度模型参数建模方法

Cross-WLF模型由Cross剪切变稀模型与WLF温度敏感方程复合而成，可完整描述粘度与剪切速率、温度的定量关系。

2.1 粘度 - 剪切速率关系 (Cross 模型)

粘度与剪切速率的关系式为：

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau^*}\right)^{1-n}} \quad (1)$$

式中： η 为表观粘度 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)； η_0 为零剪切粘度 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)，即剪切速率趋近于0时的粘度； $\dot{\gamma}$ 为剪切速率 (s^{-1})； τ^* 为特征松弛参数 (Pa)，反映分子链松弛时间； n 为非牛顿指数 (无量纲)， $n < 1$ 时材料表现为剪切变稀， n 越小剪切变稀效应越显著。

2.2 零剪切粘度 - 温度关系 (WLF 方程)

零剪切粘度与温度的关系方程为：

$$\eta_0 = D_1 \exp \left[-\frac{A_1 (T - T^*)}{A_2 + (T - T^*)} \right] \quad (2)$$

$$T^* = D_2 + D_3 p \quad (3)$$

式中： D_1 为参考温度下的零剪切粘度系数（Pa·s）； D_2 为低压下的玻璃化转变温度（K），决定材料从玻璃态向高弹态转变的临界温度； A_1 、 A_2 为WLF方程参数（无量纲），分别反映温度敏感性与温度偏移特性； T 为热力学温度（K）； T^* 为玻璃化转变温度（K）； p 为压力（Pa）； D_3 为压力系数，对于石蜡这种小分子非牛顿流体， D_3 一般取0。

结合式（1）与（2），Cross-WLF模型通过7个参数（ n 、 τ^* 、 D_1 、 D_2 、 D_3 、 A_1 、 A_2 ）完整描述蜡料粘度的非线性变化。

2.3 参数建模方法

目前大部分研究对于Cross-WLF模型参数建模采用简单最小二乘法，但是最小二乘法仅适合线性模型，对于蜡料粘度这种参数非线性强耦合模型误差大、适配性差，难以满足蜡模的注射数值模拟精度。牛顿法作为典型的二阶优化方法，对于函数 $f(x)$ ，其迭代公式为： $x_{k+1}=x_k-H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$ ，其中 $\nabla f(x_k)$ 是梯度， $H(x_k)$ 是Hessian矩阵。通过利用目标函数的一阶导数（梯度）与二阶导数（Hessian矩阵）信息构建二次模型，可精准捕捉参数间的非线性耦合关系，理论上能更快收敛至全局最优解，在高维非线性参数建模问题中展现出比最小二乘法更优的精度潜力。然而，牛顿法在实际应用中存在显著局限：一方面，直接计算Hessian矩阵及其逆矩阵的复杂度高达 $O(n^3)$ （ n 为待建模型参数维度），对于Cross-WLF模型7个关键参数的建模，会降低参数求解效率；另一方面，当Hessian矩阵出现奇异[条件数 $\kappa(H)>10^6$]时，不仅会导致逆矩阵求解失败，还可能引发迭代过程震荡甚至不收敛，难以适配蜡料粘度数据随温度、剪切速率剧烈变化的强非线性场景。

本研究在传统最小二乘法与牛顿法的基础上，提出融合自动微分与SVD（奇异值分解，Singular Value Decomposition）正则化的拟牛顿法改进方法，不直接计算Hessian矩阵，而是构造一个Hessian矩阵的近似正定矩阵，通过每次迭代中目标函数的梯度变化信息并结合自动微分技术，提升计算精度，同时结合SVD正则化处理Hessian矩阵奇异问题，当矩阵条件数 $\kappa(H)>10^6$ 时，截断小奇异值避免数值爆炸；通过BFGS（Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno）公式动态更新Hessian逆矩阵，规避直接计算Hessian矩阵的高复杂度，计算复杂度降至 $O(n^2)$ 。该改进方案可弥补简单最小二乘法在精度、效率及适配性上的缺陷以及牛顿法计算Hessian矩阵及其逆矩阵的高复杂度和可能出现的数值不稳定问题。具体数学模型如下所述。

拟牛顿法核心是构建Hessian矩阵的近似正定矩阵，通过迭代过程中目标函数的梯度信息，并通过BFGS迭代公式递推更新Hessian逆矩阵的近似值。在每次迭代 k 中，计算模型的预测值 $\hat{y}_i^{(k)}$ 与实际数据 y_i 之间的差异。采用损失函数 $L(\theta^{(k)})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y}_i^{(k)})^2$ 来衡量这种差异。其迭代更新公式为：

$$\theta_{k+1}=\theta_k-\alpha_k H_k^{-1} \nabla f(\theta_k) \quad (4)$$

式中： k 为迭代次数； α_k 为步长； H_k^{-1} 为采用BFGS算法更新的Hessian逆矩阵； $\nabla f(\theta_k)$ 为目标函数在 θ_k 处的梯度向量（ $\theta=[n, \tau^*, D_1, D_2, A_1, A_2]^T$ 为待优化参数向量）。Hessian逆矩阵通过更新BFGS公式：

$$H_{k+1}^{-1}=H_k^{-1}+\left(1+\frac{y_k^T H_k^{-1} y_k}{s_k^T y_k}\right) \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}-\frac{s_k y_k^T H_k^{-1}+H_k^{-1} y_k s_k^T}{s_k^T y_k} \quad (5)$$

式中： $s_k=\theta_{k+1}-\theta_k$ 为参数更新量， $y_k=-\nabla f(\theta_{k+1})-\nabla f(\theta_k)$ 为梯度更新量，该公式可保障 H_k^{-1} 的正定性。Armijo条件（又称Armijo规则或充分下降条件）是线搜索方法中用于确定可接受步长的一种回溯搜索准则^[19]。它的主要目的是确保所选步长能够带来充分的函数值下降，从而保证优化算法的全局收敛性，因此步长 α_k 通过Armijo条件判定 [$f(\theta_k-\alpha_k p_k) \leq f(\theta_k)+0.01\alpha_k \nabla f(\theta_k)^T p_k$ ， $p_k=-H_k^{-1} \nabla f(\theta_k)$ 为搜索方向]。当矩阵 A （拟牛顿法迭代过程中构建的Hessian近似矩阵）接近奇异时，采用奇异值分解（SVD）法将其分解为三个矩阵的乘积： $A=U\Sigma V^T$ ，其中 U 和 V 是正交矩阵， Σ 是对角矩阵，其对角元素为 A 的奇异值，求逆比直接求逆更稳定。

为充分探究拟牛顿法的优势，本研究分别采用简单最小二乘法与拟牛顿法进行粘度参数建模，并综合对比其差异。

3 结果与讨论

3.1 粘度建模结果

图4(a)、(b)、(c)分别对应60℃、62℃、64℃下最小二乘法和拟牛顿法的粘度建模结果。拟牛顿法与最小二乘法的建模曲线均随剪切速率的增大呈现出剪切变稀的流变行为，且温度越高，相同剪切速率下的粘度越低，这与蜡料分子热运动随温度升高而加剧、分子间作用力减弱的规律相契合。拟牛顿法的建模曲线与试验数据的整体贴合度更优，在低剪切速率阶段，两种方法的建模数据与试验数据的偏差均较小，但随着剪切速率的升高，最小二乘法的建模偏差逐渐增大，而拟牛顿法仍能较好地与试验数据贴合。拟牛顿法通过自动微分技术精准获取梯度与Hessian矩阵，结合SVD正则化保障了数值计算的稳定性，并借助BFGS算法动态更新Hessian逆矩阵，有效捕捉了蜡

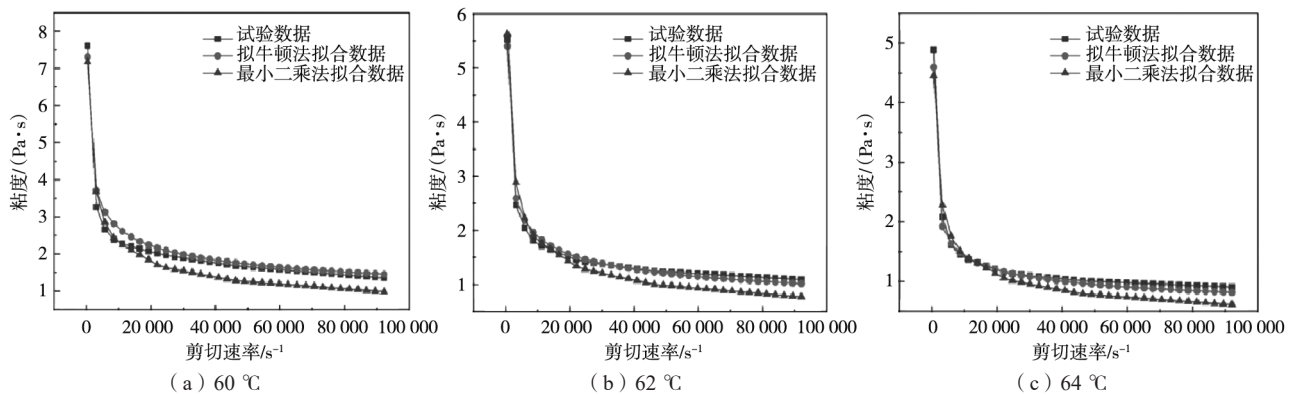


图4 不同温度下拟牛顿法与最小二乘法粘度建模结果

Fig. 4 Viscosity fitting results using the quasi-Newton and least squares methods at different temperatures

料粘度与剪切速率、温度之间的强非线性耦合关系，避免了最小二乘法仅依赖一阶梯度信息易陷入局部极值的缺陷。即便在高剪切速率、多温度的复杂条件下，拟牛顿法也能稳定收敛至更优的参数组合，从而更精准地反映蜡料的流变特性。

进一步对比不同温度下的建模效果，60 °C时，由于蜡料分子缠结相对紧密，粘度对剪切速率的变化更为敏感，两种方法的建模偏差差异相对更易体现，拟牛顿法在此温度下的优势更为突出；随着温度升高至62 °C、64 °C，蜡料分子的活动能力增强，粘度整体降低且对剪切速率的敏感性略有下降，但拟牛顿法始终保持着相较于最小二乘法更高的建模精度。这表明拟牛顿法不仅在单一温度条件下表现出色，还具备跨温度区间的稳定适配性，为后续基于Moldflow软件开展蜡模注射成形全流程数值模拟（涵盖充型、收缩、翘曲等关键过程），提供了更为可靠的粘度模型参数支撑，有助于提升模拟结果的准确性。

图5 (a)、(b)、(c) 是不同温度下测试粘度与建模粘度的散点图，图5 (d) 则是两种方法在不同温度下的决定系数 R^2 对比柱状图。从散点图可以看出，拟牛顿法的散点更为紧密地分布在测试粘度等于建模粘度的虚线附近，这清晰地表明其建模值与测试值的一致性更好；而最小二乘法的散点相对来说更加分散，偏离这条虚线的程度也更大。从 R^2 柱状图可以直观地发现，拟牛顿法在60 °C、62 °C、64 °C这三个温度下的 R^2 值(0.989)均高于最小二乘法(0.901)，并且随着温度的升高，拟牛顿法 R^2 值的优势变得更为显著。Cross-WLF模型的核心是通过剪切项(Cross方程)与温度项(WLF方程)的耦合描述粘度，当温度升高时，温度与剪切速率的非线性关系更加明显，这进一步证明了拟牛顿法通过捕捉参数之间的二阶耦合效应，在对蜡料这种具有强非线性的粘度进行建模时，其精度和稳定性要优于仅依赖一阶梯度的最小二乘法，能够更精准地反映出蜡料在不同温度下的粘度

特性，为后续基于Moldflow软件开展蜡模注射成形数值模拟提供了更加可靠的粘度模型参数支持。

图6 (a)、(b) 分别是拟牛顿法和最小二乘法的残差分布三维曲面图，图6 (c)、(d) 则是对应的残差直方图。从残差分布曲面图看，拟牛顿法的残差三维曲面整体上更为平缓，颜色的变化相对比较柔和，这表明残差的分布更加均匀，而且数值也较小；而最小二乘法的残差曲面存在明显的凸起区域，这意味着在某些剪切速率和温度的组合情况下，残差较大，并且波动也更为剧烈。从残差直方图来看，拟牛顿法的残差分布更为集中，主要聚集在较小的残差区间内；而最小二乘法的残差分布则更为分散，存在较多大残差的情况。这进一步证明拟牛顿法通过更加精准地建模蜡料粘度，使得残差得到更有效地控制。

3.2 基于粘度建模新方法参数的Moldflow模拟

拟牛顿法与最小二乘法参数建模结果如表1所示，将其输入到Moldflow软件中进行注射成形数值模拟。

如图7所示，对蜡料充型过程的温度和粘度进行分析，充型过程中，熔体接触壁面后温度迅速降低至模具温度，只有界面前沿熔体保持较高的温度向前推进，熔体前沿温度为62 °C，与设定温度相同，软件模拟准确性较高。同时，由图7可知，由于接触到壁面的熔体温度骤降，其粘度也上升至固态值，界面前沿粘度较低，拟牛顿法建模参数粘度值为1.36 Pa·s，最小二乘法建模参数值为0.86 Pa·s，与图4中建模粘度值一致，更符合实际粘度值，证明了粘度建模方法的稳定性与可行性。

蜡料的尺寸精度与冷却速率和均匀性直接相关，而粘度高低会显著影响冷却过程。拟牛顿法建模的高粘度熔体，高粘度对应分子链缠结更紧密(低温下更显著)，冷却阶段分子链的重排与结晶速度更平缓，这种慢收缩特性使熔体在模具内的温度场与收缩场演化更同步，如图8温度场截面图所示，各区域的温度梯

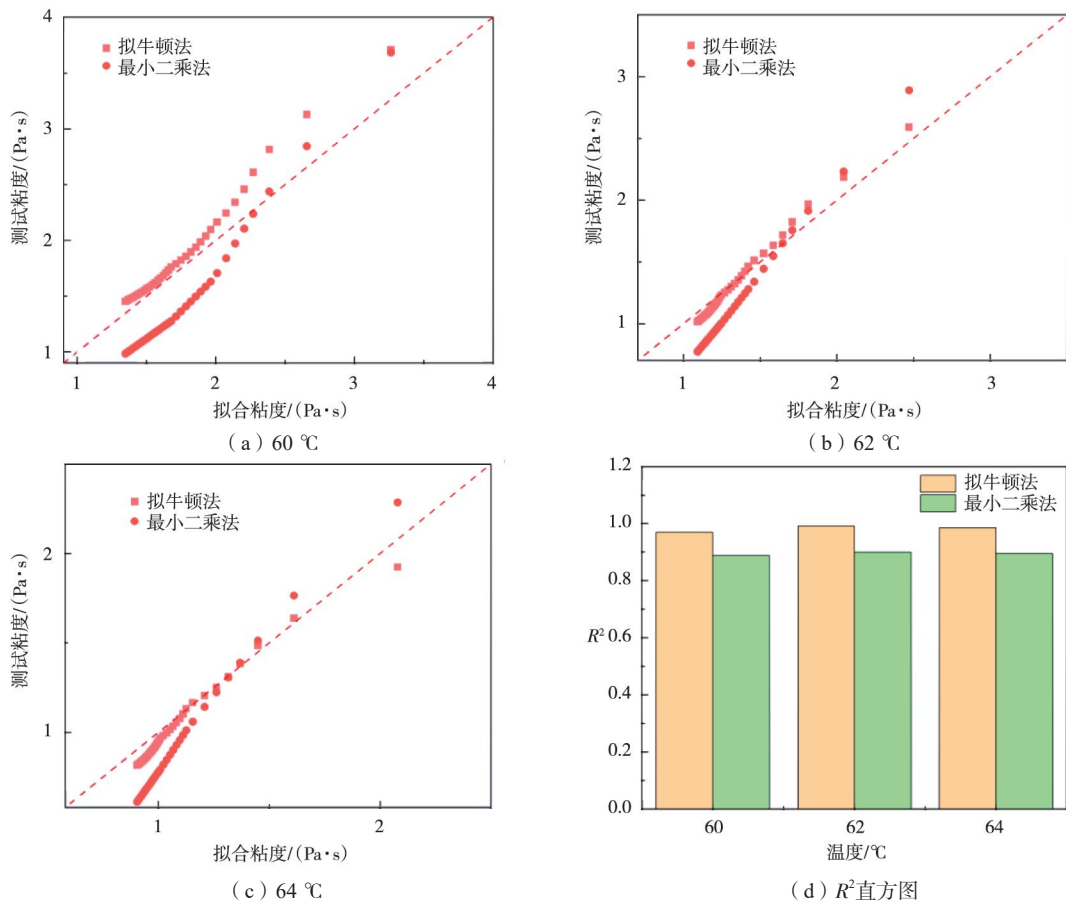


图5 不同温度下拟牛顿法与最小二乘法粘度建模误差图

Fig. 5 Viscosity fitting error diagrams via quasi-Newton and least-squares methods at various temperatures

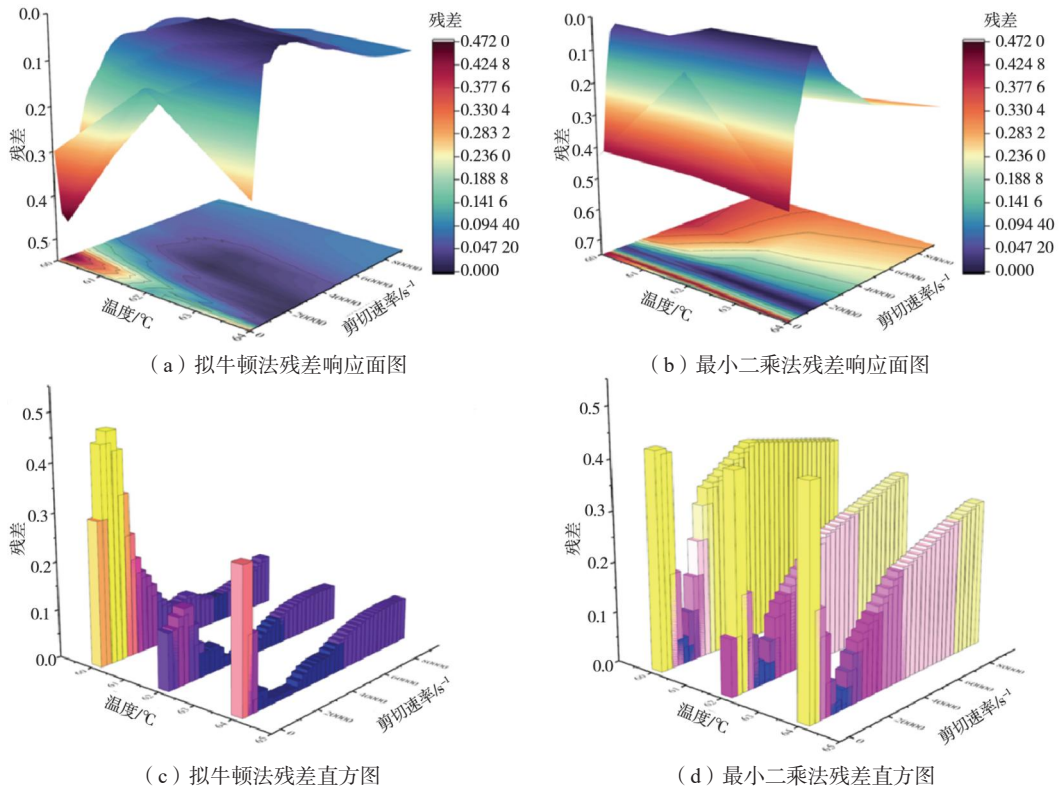
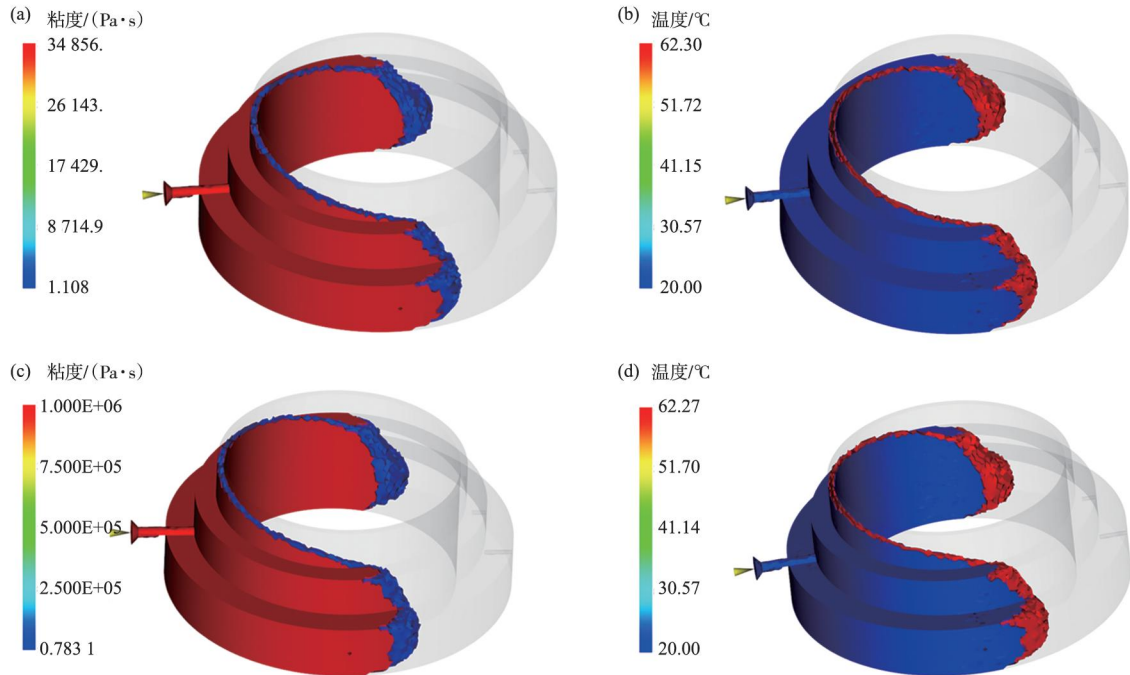


图6 拟牛顿法与最小二乘法残差分布图

Fig. 6 Residual distribution plots of the quasi-Newton and leastsquares methods

表1 Cross-WLF 粘度模型参数 (拟牛顿法与最小二乘法)
 Tab. 1 Fitted parameters for the Cross-WLF viscosity model (quasi-Newton method and least squares methods)

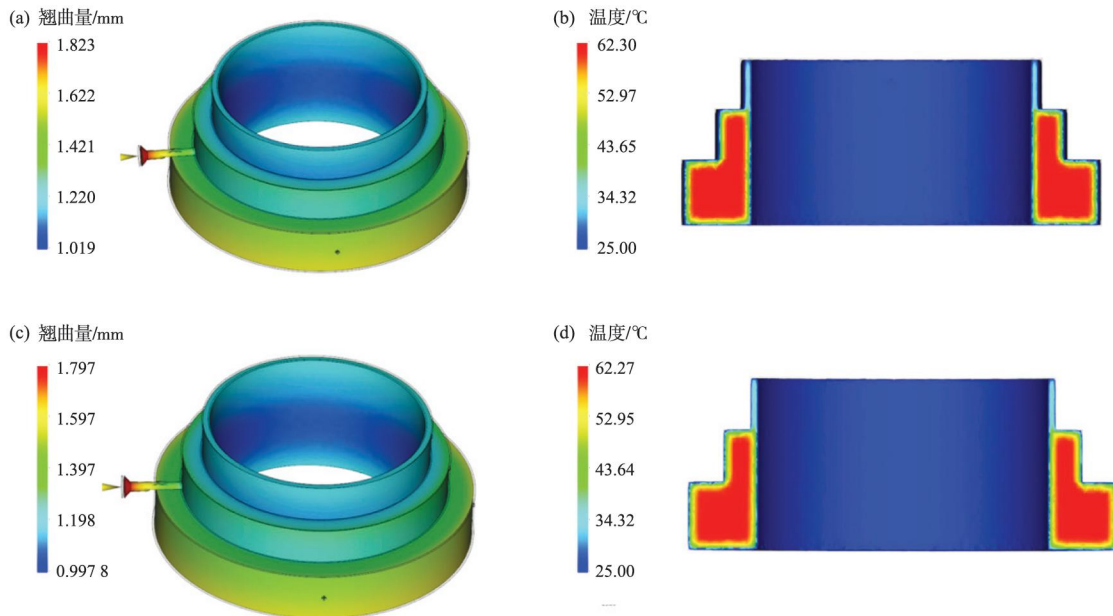
项目	n	τ^*	D_1	D_2	A_1	A_2
拟牛顿法	0.62	0.61	1.08×10^{17}	263.85	55.85	51.38
最小二乘法	0.72	0.11	1.77×10^{17}	256.66	78.13	99.98



(a, b) 拟牛顿法; (c, d) 最小二乘法

图7 基于拟牛顿法与最小二乘法粘度建模参数的充型过程粘度场与温度场数值模拟结果

Fig. 7 Numerical simulation results of viscosity and temperature fields during mold filling processes based on the parameters obtained from quasi-Newton and leastsquares viscosity fitting



(a, b) 拟牛顿法; (c, d) 最小二乘法

图8 基于拟牛顿法与最小二乘法粘度建模参数的截面温度场和翘曲场数值模拟结果

Fig. 8 Numerical simulation results of cross-sectional temperature and warpage fields based on the parameters obtained from quasi-Newton and leastsquares viscosity fitting

度更小，因此其翘曲值也略小于最小二乘法建模参数翘曲值。

3.3 实际注射试验验证

为进一步验证拟牛顿法粘度建模参数的准确性，对于模拟参数进行实际注射试验，保压结束后将蜡模取出静置，待蜡模冷却通过蓝光扫描记录其位移值用于与数值模拟结果对比。图9 (a) 为拟牛顿法粘度建模参数蜡模平均体积收缩率数值模拟结果云图，图9

(b) 为实测位移云图。由于阶梯结构的存在，蜡模各部位体积收缩率差异较大，尤其是体积收缩率发生突变的区域是尺寸超差的高发区。图9 (a) 中模拟结果在第二级阶梯表面与注蜡口位置颜色发生突变，既体积收缩率发生突变。与图9 (b) 实际扫描结果相对比，在相应位置同样发生位移突变，尺寸超差趋势与数值模拟结果相吻合。图9 (c) 为蜡模实物照片，在相应位置同样发现缩痕，进一步验证了本研究粘度建模新方法具有可靠性。

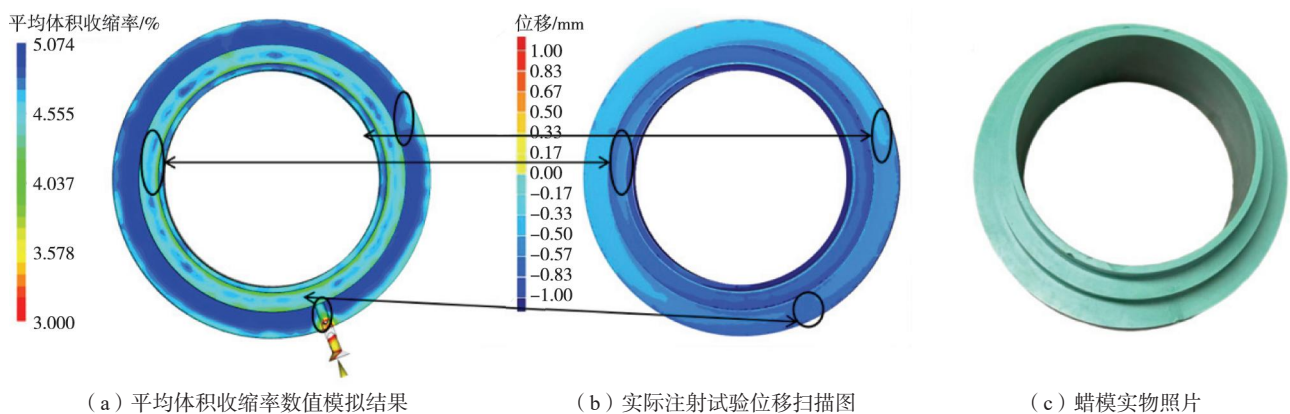


图9 模拟验证结果

Fig. 9 Simulation verification results

4 结论

本研究以钛合金熔模精密铸造用Kc-4017b蜡料为研究对象，针对其剪切致稀的非牛顿流体特性，提出了蜡料粘度Cross-WLF模型参数的高精度建模方法，填补了Moldflow软件数据库中石蜡基材料粘度模型参数的空白。主要结论如下：

(1) 针对Kc-4017b蜡料Cross-WLF模型高维非线性建模难题，提出融合自动微分与SVD正则化的拟牛顿法，60~64 °C下建模 R^2 为0.989，远高于简单二乘法 ($R^2=0.901$)，实现了蜡料非牛顿流体粘度特性的高精

度建模。

(2) 将拟牛顿法建模的Cross-WLF参数导入Moldflow软件中进行环形阶梯蜡模注射充型过程数值模拟，并与实际蜡模注射试验结果对比，其变形趋势高度一致，验证了该模型对模拟可靠性的提升作用。

(3) 拟牛顿法在不同温度与剪切速率区间均表现出稳定适配性，能够精准表征蜡料粘度与剪切速率、温度的耦合效应，使模型参数更符合实际流变规律，进而提升了数值模拟预测精度，为非牛顿流体充型过程提供坚实的理论基础。

参考文献：

- [1] 张鹏飞, 张林嘉, 周瑜, 等. 钛合金精密铸造技术在航空航天领域的应用进展 [J]. 航空制造技术, 2025, 68 (7): 22-36.
- [2] 冉兴, 吕志刚, 曹建, 等. 大型复杂钛合金铸件熔模精密铸造技术 [J]. 铸造, 2021, 70 (2): 139-146.
- [3] 鄒喜望, 潘思源, 杨冬丽, 等. 大型钛合金中介机匣蜡模一体化制备技术研究 [J]. 航空制造技术, 2024, 67 (23/24): 65-71.
- [4] 周乐尧, 汪东红, 刘淑梅, 等. 大尺寸燃气轮机叶片蜡模注射成形与尺寸精度控制 [J]. 铸造, 2023, 72 (6): 641-647.
- [5] LIAO Shengcheng, DENG Junjun, MAO Xiangkai, et al. Effects of polyethylene wax on the processability, structure,

- and mechanical properties of injection-molded industrial UHMWPE products [J]. Polymer, 2025, 334: 128715.
- [6] ZHAO Biao, DING Wenfeng, SHAN Zhongde, et al. Collaborative manufacturing technologies of structure shape and surface integrity for complex thin-walled components of aero-engine: status, challenge and tendency [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2023, 36 (7): 1-24.
- [7] DAI Jing, XU Songzhe, CHEN Chaoyue, et al. A multi-objective optimization based on machine learning for dimension precision of wax pattern in turbine blade manufacturing [J]. Advanced Manufacturing, 2024, 12: 428-446.
- [8] KUMAR S, KARUNAKAR D B. Development of wax blend

- pattern and optimization of injection process parameters by grey-fuzzy logic in investment casting process [J]. *International Journal of Metalcasting*, 2022, 16 (2) : 962-972.
- [9] BAZHENOV V E, OVSYANNIKOV A S, KOVYSHKINA E P, et al. The numerical simulation of the injection filling of the fluidity probe die with pattern waxes [J]. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 2024, 8 (5) : 213.
- [10] 方清远, 焦自翔, 纪艳卿, 等. 单环多支板蜡模注蜡成形工艺优化及表面质量控制 [J]. *特种铸造及有色合金*, 2025, 45 (4) : 635-640.
- [11] 许庆彦. 熔模铸造过程数值模拟研究进展 [J]. *铸造*, 2022, 71 (7) : 803-813.
- [12] 古俊同, 汪东红, 肖旅. 注蜡过程数值模拟蜡料性能的研究 [J]. *特种铸造及有色合金*, 2016, 36 (4) : 394-396.
- [13] JENA R K, CHEN X, YUE C Y, et al. Viscosity of COC polymer (TOPAS) near the glass transition temperature: experimental and modeling [J]. *Polymer Testing*, 2010, 29 (6) : 933-938.
- [14] WILLIAMS M L, LANDEL R F, FERRY J D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids [J]. *Journal of the American Chemical Society*, 1955, 77 (14) : 3701-3707.
- [15] OLLEY P, MULVANEY-JOHN SOL L, COATES P D. Simulation of the gas-assisted injection moulding process using a viscoelastic extension to the Cross-WLF viscosity model [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 2011, 225 (3) : 239-254.
- [16] 杨铭, 廖敦明, 陈宇豪, 等. 基于 Projection VOF 方法的熔模铸造蜡模充型过程数值模拟 [J]. *铸造*, 2023, 72 (2) : 107-114.
- [17] 冒文娟. 基于 Moldflow 的 Cross-WLF 粘度模型研究 [J]. *塑料工业*, 2020, 48 (7) : 47-50.
- [18] SHI Xianzhang, HUANG Ming, ZHAO Zhenfeng, et al. Nonlinear fitting technology of 7-parameter Cross-WLF viscosity model [J]. *Advanced Materials Research*, 2011, 189-193: 2103-2106.
- [19] 孙清滢, 刘新海. 结合广义 Armijo 步长搜索的一类新的共轭度算法及其收敛特征 [J]. *工程数学学报*, 2003, 20 (1) : 14-20.